МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНА НАУКОВА УСТАНОВА
«ІНСТИТУТ МОДЕРНІЗАЦІЇ ЗМІСТУ ОСВІТИ»

вул. Митрополита Василя Липківського, 36, м. Київ, 03035, тел./факс: (044) 248-25-13

Від 22.06.2016 **№** 2.1/10-1515
На № _______ **від** ___________

Ректорам (директорам) інститутів
післядипломної педагогічної освіти

Про проведення фінального етапу
XIX Всеукраїнського турніру
юних математиків імені М. Й. Ядренка

Повідомляємо, що фінальний етап XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка планується провести в жовтні-листопаді 2016 року. Турнір буде проведено відповідно до вимог Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (зі змінами), затвердженого наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22 вересня 2011 р. № 1009, зареєстрованого в Міністерстві юстиції України 17 листопада 2011 р. за № 1318/20056.

Отримати інформацію щодо умов участі у фінальному етапі XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка можна за тел. (044)2482195, 0677803018 (Гунько Лілія Вікторівна) та на офіційній web-сторінці ТЮМу www.ukrtym.blogspot.com.

Завдання, що пропонуються для I етапу турніру (міжшкільних, районних, міських, обласних змагань), додаються.

В. о. директора К. М. Левківський

Гунько Л. В.
(044)2482195

Додаток до листа
Інституту модернізації змісту освіти
від 22.06.2016 №2.1/10-1515

Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти

XIX ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбіркових етапів турніру[*]

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Спільний ортоцентр»

На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC відмітили точки K і N. Доведіть, що ортоцентри трикутників BCK і ACN збігаються тоді й тільки тоді, коли $\frac{BN}{AK} = \operatorname{tg}^2 A$.

2. «Сума послідовних чисел Фібоначчі»

Послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, в якій $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n \geqslant 2$, називається послідовністю чисел Фібоначчі. Які ви зможете знайти натуральні числа $m > 1$ такі, що сума будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі ділиться без остачі на m?

[*]За цими задачами будуть проведені чвертьфінальні та півфінальні бої фінального етапу XIX Всеукраїнського турніру юних математиків. Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

3. «Видовищність турніру»

У футбольному турнірі «на виліт» грає 2^n команд з рівнями гри, позначеними натуральними числами від 1 до 2^n (усі команди мають різний рівень гри; матч між двома командами завжди виграє команда з більшим рівнем гри). Спершу команди розбивають на 2^{n-1} пар, і ці пари грають між собою, потім 2^{n-1} переможців розбивають на 2^{n-2} пар, які грають між собою, і т. д., поки не залишиться лише одна команда — переможець турніру. *Видовищністю матчу* між двома командами назвемо модуль різниці рівнів цих команд, *видовищністю турніру* назвемо суму видовищностей усіх проведених ігор. Для заданого натурального $n \geqslant 2$ знайдіть найменше та найбільше можливе значення видовищності турніру.

4. «Хокей на Олімпійських іграх»

Нехай n — задане натуральне число. У хокейних змаганнях на Олімпійських іграх бере участь $2n$ команд, які розігрують між собою турнір в одне коло (кожна команда з кожною грає по одному матчу). За перемогу в основний час команді присуджують 3 очки, за перемогу в додатковий час — 2 очки, за поразку в додатковий час — 1 очко, а за поразку в основний час команда отримує 0 очок.

4.1. Яку найменшу кількість очок може набрати команда-переможець турніру?

4.2. Яку найбільшу кількість очок може набрати команда, що посіла останнє місце?

5. «Функціональна нерівність»

Нехай $n \geqslant 2$ — натуральне число. Чи існує набір ненульових дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ з такою властивістю: якщо функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для будь-яких дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задовольняє нерівність

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f\left(x_i + x_j\right) \geqslant \frac{n(n-1)}{2} f\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n\right),$$

то вона є сталою?

6. «Деформовані числа»

Назвемо натуральне число *таким, що деформується*, якщо його запис у заданій системі числення не закінчується нулем та в цьому записі можна викреслити цифру, яка не є ані першою, ані останньою, так, щоб початкове число без остачі ділилося на отримане число.

6.1. В яких системах числення немає чисел, що деформуються?

6.2. Чи існує така система числення, в якій безліч чисел, що деформуються?

6.3. Чи існує таке число, яке в десятковій системі числення можна деформувати двічі поспіль?

7. «Точки на прямій»

Андрійко та Миколка грають у таку гру. Андрійко вибирає 2016 точок на проміжку $(0; +\infty)$. Миколка довільно фарбує кожну з них синім або зеленим кольором. Після цього Андрійко вибирає додатне число a і фарбує всі проміжки $((2n-2)a;\ (2n-1)a)$, $n \in \mathbb{N}$, у синій колір, а всі проміжки $((2n-1)a;\ 2na)$, $n \in \mathbb{N}$, — у зелений. Якщо кожна з вибраних на початку гри Андрійком точок належатиме інтервалу такого ж самого кольору, то Андрійко вважатиметься переможцем. В іншому випадку переможцем буде Миколка. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу?

8. «Оцінки для кількості розв'язків»

Нехай $n \geqslant 2$ — задане натуральне число. Позначимо через A_n кількість розв'язків у натуральних числах рівняння $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n^2$. Доведіть, що має місце нерівність

$$\frac{n^n(n-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n!)^2} < A_n < \frac{n^{2n-1}}{(n!)^2}$$

$(1! = 1;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ n \geqslant 2)$.

9. «Показникове рівняння в натуральних числах»

Розв'яжіть у натуральних числах x, y і z рівняння $1 + 2^x + 2^{x+y} = 5^z$.

10. «Рівняння з коренями»

Розв'яжіть у цілих числах x і y рівняння $\sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2y^3} = \sqrt[3]{13x + 8}$.

11. «Рівняння з цілою частиною»

Розв'яжіть у цілих числах x і y рівняння

$$\left[\frac{x^2 - y^3}{x + y^2}\right] = 1 + x - y$$

(тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a).

12. «Числова таблиця»

Чи можна заповнити цілими числами таблицю 6×6 так, щоб сума всіх чисел у кожному квадраті 3×3 цієї таблиці дорівнювала 2016, а сума всіх чисел у кожному квадраті 5×5 дорівнювала 2015?

Таке ж саме питання для таблиці 7×7.

13. «Доведення нерівності»

Для довільного натурального $n \geqslant 2$ доведіть, що

$$\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} - \ldots + \sqrt{\frac{4n-3}{n}} - \sqrt{\frac{4n-2}{n}} + \sqrt{\frac{4n-1}{n}} > 1.$$

14. «Знову відновлюємо трикутник»

За допомогою лише циркуля та лінійки відновіть трикутник ABC за такими трьома точками: точкою M перетину його медіан, точкою I — центром його вписаного кола і точкою Q_a дотику вписаного кола до сторони BC.

15. «Трикутник з кутом 120°»

Дано нерівнобедрений трикутник ABC, в якому $\angle A = 120^\circ$. Нехай AL — його бісектриса, AK — медіана, проведені з вершини A, точка O — центр описаного кола цього трикутника, F — точка перетину прямих OL і AK. Доведіть, що $\angle BFC = 60^\circ$.

16. «Буратіно та музичне казино»

На Полі Чудес у Країні Дурнів Буратіно заробив 2016 золотих і вирішив запросити до корчми «Три пічкурі» своїх давніх знайомих — Карабаса Барабаса й Дуремара. Карабас Барабас запропонував йому зіграти в музичне казино з виконанням N пісень. Перед кожною з пісень Буратіно ставить якусь кількість золотих на кін і намагається вголос угадати, хто заспіває наступну пісню: Карабас Барабас або ж Дуремар (обидва вони чують прогноз Буратіно і після цього обирають, хто саме буде співати). Якщо Буратіно вгадує, то поставлена сума подвоюється і повертається Буратіно. В іншому випадку Карабас Барабас та Дуремар залишають її собі. Умовою гри передбачено, що Дуремар співатиме більше пісень, аніж Карабас Барабас. Який найбільший гарантований виграш може забезпечити собі Буратіно, якщо:

а) $N = 3$;

б) $N = 5$?

17. «Числові набори»

Нехай $a > 1$. Маємо набір з n чисел: $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$. Дослідіть можливість розбити цей набір на m частин так, щоб суми чисел у будь-яких двох з них відрізнялись не більше, ніж на q. Наприклад, для $m = 2$, $m = 3$ в першу чергу пропонується розглянути значення n, «близькі» до 100, і значення q, «близькі» до 1.

18. «Збіжність послідовності»

Нехай $m \geqslant 2$ — задане натуральне число. Послідовність невід'ємних дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є такою, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+m} \leqslant \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m-1}}{m}.$$

Доведіть, що ця послідовність має скінченну границю.

19. «Турнір претендентів»

а) У турнірі претендентів на світову першість з шахів змагалися 5 гросмейстерів: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**. Турнір проходив у декілька кіл (кожен з кожним зіграв одну й ту саму кількість партій). Відомо, що всі учасники набрали різну кількість очок і за кількістю очок розташувалися в порядку **ABCDE** (за перемогу нараховується 1 очко, за нічию — 1/2, за поразку — 0). Відомо також, що за кількістю здобутих перемог вони розташувалися в зворотному порядку **EDCBA**, тобто найбільшу кількість перемог здобув **E**, гросмейстер **D** здобув перемог менше за **E**, проте більше за **C**, і т. д. Доведіть, що не менше від 15 партій завершилися внічию.

б) Для яких n могла б виникнути аналогічна ситуація в турнірі, в якому в декілька кіл змагалися n шахістів? Для таких n визначте: 1) мінімальну кількість зіграних унічию партій; 2) мінімальну кількість кіл; 3) мінімальну кількість перемог.

20. «Бінарні таблиці та ймовірність»

Квадратну числову таблицю, у кожній клітинці якої записано або число 0, або число 1, назвемо *бінарною*. Для натурального $n \geqslant 2$ позначимо через $\mathcal{T}_n$ сукупність усіх бінарних таблиць $m \times m$, $m = 2, 3, \ldots, n$.

20.1. Знайдіть імовірність p_n того, що навмання обрана в сукупності $\mathcal{T}_n$ бінарна таблиця не має ані двох однакових рядків, ані двох однакових стовпчиків.

20.2. Обчисліть $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

* * *

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

І. Г. Величко, О. В. Величко, В. М. Журавльов, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, М. П. Мороз, Д. П. Мисак, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, П. І. Самовол, О. К. Толпиго, І. В. Федак, В. Д. Федачківський, Д. І. Хілько, $\boxed{\text{В. А. Ясінський}}$.