Додаток до листа
Інституту інноваційних
технологій і змісту освіти
від 18.05.2015 №14.1/10-709

Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій і змісту освіти

XVIII ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Завдання для відбіркових етапів турніру[*]

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. «Складене число»

Знайдіть таке найменше складене число n, що $2^{n-1}-1$ ділиться без остачі на n. Чи буде множина всіх таких складених n нескінченною?

2. «2015»

Для кожного натурального числа n знайдіть усі такі пари натуральних чисел x і y, що $x^n - y^n = 2015$.

3. «Сума найбільших спільних дільників»

Дослідіть, яких значень для натуральних чисел a, b і c може набувати

[*]За цими задачами будуть проведені чвертьфінальні та півфінальні бої фінального етапу XVIII Всеукраїнського турніру юних математиків. Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

вираз $\left(a^2, b^2\right) + (a, bc) + (b, ca) + (c, ab)$ (тут (u, v) — найбільший спільний дільник чисел $u \in \mathbb{N}$ і $v \in \mathbb{N}$).

4. «Функціональне рівняння й диференційовність»

Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняють одночасно такі дві умови:

а) $f\left(x + yf(x)\right) = f(x)f(y)$ для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$;

б) функцію f можна подати у вигляді $f(x) = \left(\varphi(x)\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$, де функція φ має скінченну похідну в точці $x = 0$.

Дослідіть це функціональне рівняння для інших властивостей функції f.

5. «Кількість складів і сума цифр»

Знайдіть кількість натуральних чисел, менших за 1000, що мають таку властивість: сума цифр числа в десятковій системі числення дорівнює кількості складів (тобто голосних літер) у його назві (відповідному числівнику української мови).

6. «Країна чотирьох островів»

На островах A, B і C проживає по 2000 чоловік, а на острові D — 2015 чоловік. Щодня в країні відбувається переселення: з одного з островів перебираються на кожен з решти островів по одній людині. Чи може через певну кількість днів статися так, щоб на острові A опинилося 2015 мешканців, а на островах B, C і D — по 2000 мешканців?

7. «Кількість траєкторій»

Нехай k, m і n — задані натуральні числа, причому $|n - m| < k$. Коник хоче з початку координат — точки $(0;0)$ — дістатися точки $(m;n)$, рухаючись стрибками, кожен з яких відбувається або на 1 вгору, або ж на 1 праворуч. Знайдіть кількість усіх таких траєкторій коника, які не мають спільних точок з прямими $y = x + k$ та $y = x - k$.

8. «Нелінійна система рівнянь»

Розв'яжіть у додатних дійсних числах x, y і z систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - 20y + 15z = 18, \\ \dfrac{1}{y} - 15z + 18x = 20, \\ \dfrac{1}{z} - 18x + 20y = 15. \end{cases}$$

9. «Нерівність для факторіалів»

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Доведіть, що

$$n\,(n!)^{1/n} - m\,(m!)^{1/m} \leqslant \frac{(n-m)(n+m+1)}{2}$$

$(1! = 1;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ n \geqslant 2)$.

10. «Різниця середніх гармонічних»

Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ виконується нерівність

$$\frac{n}{\dfrac{1}{1+a_1} + \dfrac{1}{1+a_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+a_n}} - \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \geqslant 1.$$

З'ясуйте, коли в такій нерівності досягається рівність.

11. «Перестановка чисел»

Нехай $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — довільна перестановка заданих невід'ємних дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доведіть, що

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i + a_i b_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(1 + a_i + a_i^2\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(1 + a_i + b_i^2\right).$$

12. «Степенево-показникова нерівність»

Доведіть, що для довільних дійсних чисел $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$ має місце нерівність $x^y + y^z + z^x \leqslant x^x + y^y + z^z$.

Дослідіть, для яких ще додатних дійсних чисел x, y і z виконується ця нерівність.

13. «Ще одна нерівність»

Нехай дійсні числа x, y і z задовольняють одночасно дві рівності:

$$(x+y)\left(x^2 + y^2 + 2z\right) = 1,$$
$$\left(x^2 + z\right)^2 + z(x+y)^2 = 1.$$

Доведіть, що тоді виконується нерівність $\left(y^2 + z\right)^2 + z(x+y)^2 \geqslant z$.

З'ясуйте, коли в цій нерівності досягається рівність.

14. «Композиція тригонометричних функцій»

Позначимо через $\mathcal{M}$ сукупність функцій $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \cos x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Чи існує таке $n \in \mathbb{N}$ і такі функції $f_1 \in \mathcal{M}$, $f_2 \in \mathcal{M}, \ldots, f_n \in \mathcal{M}$, що $f_1\left(f_2\left(\ldots f_n\left(2015\right)\ldots\right)\right) = 1$?

15. «Восьмивершинний граф»

Яку найбільшу кількість ребер може мати простий граф з 8 вершинами, в якому відсутні цикли довжини 4?

16. «Потрійні точки»

На площині задано 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві з цих точок провели пряму. Точку площини, відмінну від заданих, назвемо *потрійною*, якщо через неї проходить рівно три з проведених прямих. Знайдіть найбільшу можливу кількість потрійних точок.

17. «Точки кільця»

Яку найбільшу кількість точок координатної площини можна відмітити в кільці $\big\{(x;y)\big|\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\big\}$ так, щоб відстань між будь-якими двома з них була не меншою за 1?

18. «Розбиваємо круг»

Чи можливо трьома хордами, відмінними від діаметрів, розбити круг на декілька рівновеликих частин?

19. «Пофарбований многогранник»

Чи існує такий опуклий многогранник, усі грані якого є трикутниками і поверхню котрого пофарбовано в синій колір, що його можна розрізати на тетраедри так, щоб усі вершини тетраедрів були вершинами многогранника, будь-які два тетраедри зі спільною вершиною мали або спільне ребро, або ж — спільну грань, і в кожного з утворених тетраедрів рівно одна грань була синього кольору?

20. «Геометрія трикутника та екстремум»

Якого найменшого значення може набувати відношення довжини найбільшої сторони трикутника до радіуса його вписаного кола?

21. «Відновлюємо трикутник»

Нехай CH — висота зображеного на дошці трикутника ABC, в якому $\angle C = 90^\circ$, $CA \neq CB$. Учитель математики провів серединні перпендикуляри катетів CA і CB, які перетнули пряму CH у точках K і M відповідно, а потім витер рисунок, залишивши на дошці тільки точки C, K і M. Відновіть трикутник ABC, використовуючи лише циркуль та лінійку.

22. «Вписаний многокутник»

Нехай $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ — опуклий многокутник, $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3, \ldots,$ $a_{2n} = A_{2n}A_{2n+1}$, $a_{2n+1} = A_{2n+1}A_1$. Позначимо: $\alpha_i = \angle A_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$;

$\alpha_{k+2n+1} = \alpha_k$, $k \geqslant 1$; $\beta_i = \alpha_{i+2} + \alpha_{i+4} + \ldots + \alpha_{i+2n}$, $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$. Доведіть, що якщо

$$\frac{a_1}{\sin\beta_1} = \frac{a_2}{\sin\beta_2} = \ldots = \frac{a_{2n+1}}{\sin\beta_{2n+1}}\,,$$

то навколо даного многокутника можна описати коло.

Чи має місце обернене твердження?

23. «Цікаве геометричне місце точок»

Задано гострокутний трикутник ABC, через вершини B і C якого проведено коло Ω, $A \notin \Omega$. Розглядаються всілякі точки $P \in \Omega$, які не лежать на жодній з прямих AB і AC і для яких спільні дотичні описаних кіл трикутників APB і APC не є паралельними. Нехай X_P — точка перетину таких двох спільних дотичних.

23.1. Доведіть, що геометричне місце точок X_P належить деяким двом прямим.

23.2. Доведіть, що якщо коло Ω проходить через ортоцентр трикутника ABC, то однією з цих прямих є пряма BC.

24. «Діаметрально протилежні точки»

Вписане коло ω трикутника ABC дотикається до його сторін BC, CA і AB в точках D, E і F відповідно. Нехай точки X, Y і Z кола ω діаметрально протилежні точкам D, E і F відповідно. Прямі AX, BY і CZ перетинають сторони BC, CA і AB в точках D', E' і F' відповідно. На відрізках AD', BE' і CF' відмітили точки X', Y' і Z' відповідно так, що $D'X' = AX$, $E'Y' = BY$, $F'Z' = CZ$. Доведіть, що точки X', Y' і Z' збігаються.

25. «Локальні екстремуми многочленів»

Нехай многочлен $P(x)$ має m точок локального екстремуму, а многочлен $Q(x)$ має n точок локального екстремуму. Скільки точок локального екстремуму може мати многочлен $F(x) = P\left(Q(x)\right)$?

* * *

Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:

О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, М. О. Мороз, Д. П. Мисак, І. М. Мітельман, Д. Ю. Мітін, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, Р. В. Скуратовський, О. К. Толпиго, І. В. Федак, В. Д. Федачківський, Д. І. Хілько, Г. М. Шевченко, В. А. Ясінський.